

1 Spannungen

1.1 Allgemein

Spannung ist die Verteilung einer Kraft auf die Fläche, auf die diese Kraft wirkt.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1)$$

Die Spannungen werden in Normal- und Schubspannungen unterteilt.

$$\text{Normalspannungen: } \sigma_n = \frac{N}{A} \quad \text{Schubspannungen: } \tau = \frac{Q}{A}$$

Wobei N (Normalkraft) die auf der Fläche A senkrechte Komponente der Kraft F ist und Q (Querkraft) die auf der Fläche A tangentielle Komponente der Kraft F ist.

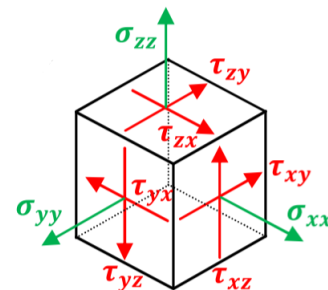
Es gibt zwei Sorten von Normalspannungen: Druck- ($\sigma < 0$) und Zugspannungen ($\sigma > 0$)

1.2 Spannungstensor

Ein Spannungstensor beschreibt den Spannungszustand von einem infinitesimalen kleinen Kontrollvolumen (einem Punkt). Die Einträge des Tensors sind abhängig vom Ort und der Richtung, in die das Kontrollvolumen positioniert bzw. geneigt ist.

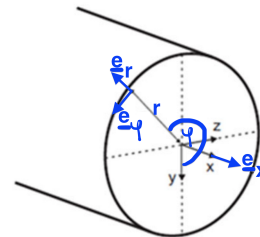
In kartesischen Koordinaten:

$$[\underline{T}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



In zylindrischen Koordinaten

$$[\underline{T}]_{x,r,\varphi} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xr} & \tau_{x\varphi} \\ \tau_{xr} & \sigma_{rr} & \tau_{r\varphi} \\ \tau_{x\varphi} & \tau_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$



Beachte: Da im Konventionwürfel die GGB eingehalten werden müssen, ist der Spannungstensor eine symmetrische Matrix ($\tau_{xz} = \tau_{zx}$).

1.3 Der Spannungsvektor

Der Spannungsvektor $\underline{s}$ stellt die auf einer Fläche wirkenden Spannungen da.

$$\underline{s}(\underline{n}) = \sigma_n \cdot \underline{n} + \tau_n \cdot \underline{t} \quad (2)$$

$$\underline{s}(\underline{n}) = \underline{T} \cdot \underline{n} \quad (3)$$

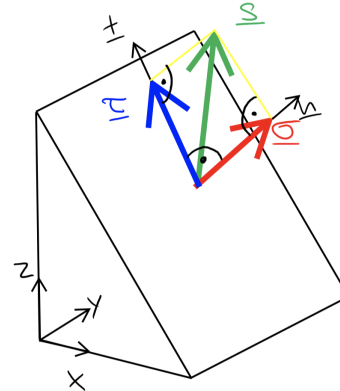
Wobei $\underline{n}$ der Normalenvektor

(**Beachte:** Einheitsvektor $|\underline{n}| = 1$)

und $\underline{t}$ der Tangentialvektor

(**Beachte:** Einheitsvektor $|\underline{t}| = 1$)

der Schnittfläche ist.



1.3.1 Der Normalspannungsvektor

Der Normalspannungsvektor ist die Komponente des Spannungsvektors, die senkrecht zur Fläche ist.

$$\underline{\sigma} = \underline{n} \cdot (\underline{s} \cdot \underline{n}) \quad \text{oder als Betrag} \quad \sigma = \underline{s} \cdot \underline{n} \quad (4)$$

1.3.2 Der Schubspannungsvektor

Der Schubspannungsvektor ist die Komponente des Spannungsvektors, die parallel zur Fläche ist.

$$\underline{\tau} = \underline{s} - \underline{\sigma} = \underline{t} \cdot (\underline{s} \cdot \underline{t}) \quad (5)$$

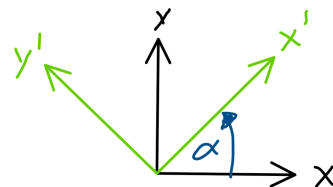
1.4 Koordinatentransformation

Wird die Fläche um den Winkel θ gedreht, ändern sich die Schub- und Normalspannungen bezüglich der gedrehten Fläche und somit des gedrehten Koordinatensystems.

$$\sigma_{x'} = \cos^2\theta \sigma_x + \sin^2\theta \sigma_y + 2\sin\theta \cos\theta \tau_{xy} \quad (6)$$

$$\sigma_{y'} = \sin^2\theta \sigma_x + \cos^2\theta \sigma_y - 2\sin\theta \cos\theta \tau_{xy} \quad (7)$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (8)$$



1.5 Hauptspannungen und Hauptachsen

Die Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 beschreiben die maximale und minimale Normalspannungen, die beim betrachteten Materialpunkt vorkommen. Die Hauptachsen $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ und $\underline{e}_3$ sind die jeweilige Richtungen der Hauptspannungen.

Beachte: Die Hauptspannungen werden der Grösse nach geordnet: $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$

Der Hauptspannungstensor sieht folgendermassen aus ($\tau_{ij} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3}$$

1.5.1 2D

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan(2 \cdot \theta) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Beachte: Falls $\alpha < 0$:

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

1.5.2 3D

Im 3D Fall müssen die Eigenwerte des Spannungstensors berechnet werden.

$$\det(\underline{T} - \lambda \cdot \underline{1}) = 0$$

Wobei $\underline{1}$ die Einheitsmatrix ist.

Löst man die charakteristische Gleichung nach λ auf, erhält man drei Resultate (λ_1, λ_2 und λ_3), die mit den Hauptspannungen gleichgesetzt werden ($\lambda_1 = \sigma_1 \dots$).

Um die Hauptspannungsrichtungen $\underline{n}_i$ der bekannten Hauptspannungen λ_i zu berechnen, muss man die die Eigenvektoren finden und normieren:

$$(\underline{T} - \lambda_i \cdot \underline{1}) \cdot \underline{n}_i = 0$$

Die Hauptachsen bilden eine Orthonormalbasis.

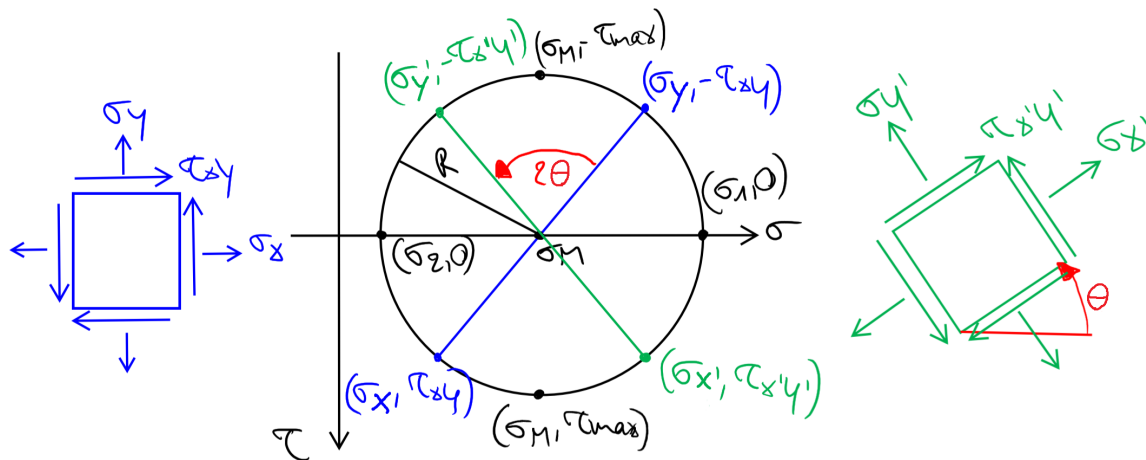
Beachte: Die Determinante einer 3x3-Matrix wird folgendermassen berechnet:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a * e * i + b * f * g + c * d * h - c * e * g - a * f * h - b * d * i$$

1.6 Mohr'scher Spannungskreis

Der Mohr'scher Spannungskreis dient zur Veranschaulichung eines Spannungszustandes. Er ist vor allem sehr nützlich, wenn man einen Spannungszustand um einen bestimmten Winkel θ drehen möchte.

Beachte: Falls der Spannungszustand in der Realität um θ gedreht wird, wird er auf dem Mohr'scher Kreis um 2θ in positive Drehrichtung der Achse, welche aus der Ebene hinauskommt bzw. in die Ebene hineingeht, gedreht!



1.6.1 Vorgehen beim Zeichnen

1. Referenzpunkte im Koordinatensystem eintragen: $P_1(\sigma_x, \tau_{xy})$ und $P_2(\sigma_y, -\tau_{xy})$
2. Verbinde P_1 und P_2 miteinander. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist der Mittelpunkt des Kreises. Die Länge der Strecke $\underline{P_1P_2}$ entspricht dem Durchmesser des Kreises. Mittelpunkt des Kreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

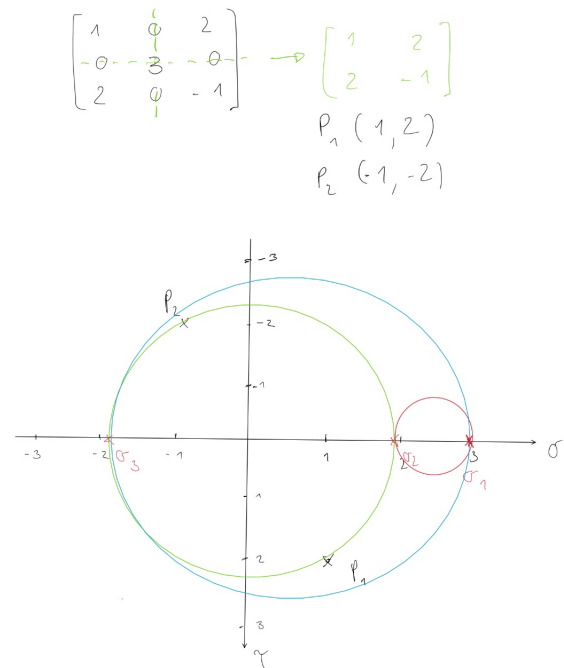
Radius des Kreises:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

3. Kreis zeichnen
4. Strecke $\underline{P_1P_2}$ um 2θ drehen, um die Spannung in der um θ gedrehten Fläche zu erhalten.

Der einzige Unterschied zwischen 2D und 3D ist die Anzahl Kreise. Im 3D hat man drei und nicht einen Kreis, da man die x-, y- und z-Achse auf drei verschiedene Arten kombinieren kann (xy, xz, yz). Es wird immer um die Hauptachse gedreht, die im Kreis nicht vorkommt.

Falls für eine *Koordinate* (y) alle Schubspannungen null sind und nur die Normalspannung ungleich null ist, kann dieses 3D Problem zu einem 2D Problem vereinfacht werden und mithilfe des Mohrschen Kreises gelöst werden. Alle Komponenten dieser *Koordinate* (y) werden aus dem 3×3 Tensor gestrichen, sodass ein 2×2 Tensor übrig bleibt. Dieser 2×2 Tensor kann dann als Mohrscher Kreis (*gruen*) gezeichnet werden. Um die weiteren 2 Kreise zu zeichnen trägt man noch die Normalspannung dieser *Koordinate* (y) auf der Spannungsachse ein, da dies auch eine Hauptspannung ist. Nun verbindet man noch diese Hauptspannung mit den Hauptspannungen des schon existierenden Kreises mit jeweils einem Kreis (*rot, blau*).



1.7 Hauptschubspannung τ_{max}

Wenn man sich den Mohr'scher Spannungskreis genauer anschaut, sieht man, dass bei den Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 immer $\tau = 0$ ist. Dies gilt jedoch nicht im Umkehrschluss (bei τ_{max} gilt nicht $\sigma = 0$).

τ_{max} kann man mit folgender Formel sehr einfach berechnen:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ bzw. im 3D } \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

1.8 von-Mises Vergleichsspannung σ_{vM}

Um in der Praxis die Belastung eines Werkstoffes, das mehreren Spannungen gleichzeitig ausgesetzt ist, zu bewerten, wird die sogenannte Von-Mises Vergleichsspannung betrachtet. Im 3D-Fall wird σ_{vM} folgendermassen berechnet:

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$$

Im 2D-Fall:

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Die von-Mises Spannung wird mit der Fließgrenze σ_F des Materials verglichen. Wenn $\sigma_{vM} \geq \sigma_F$, dann beginnt das Material zu fließen und wird plastisch verformt.

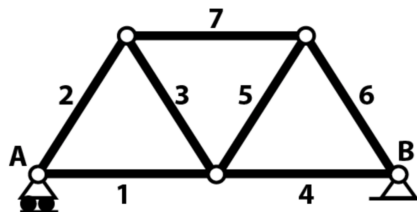
2 Stabkräfte

Um die interne Beanspruchung eines Stabes zu bestimmen, muss dessen Stabkraft berechnet werden. Die Beanspruchung ist relevant für die Auslegung der Stäbe (Materialwahl, Durchmesser, etc.).

Beim Freischneiden Kräfte immer vom Stab weg einführen, damit gilt:

- $F_{Stab} > 0 \rightarrow$ Auf den Stab wirkt eine Zugkraft
- $F_{Stab} < 0 \rightarrow$ Auf den Stab wirkt eine Druckkraft

Es gibt verschiedene Lösungsmethoden, um die Stabkräfte in einem Fachwerk zu berechnen. Im Folgenden werden das Knotengleichgewicht und der Drei-Kräfte-Schnitt anhand dieses Fachwerks erklärt:



2.1 Drei-Kräfte-Schnitt

1. Lagerkräfte am Gesamtsystem bestimmen
2. Mit einem Schnitt durch 3 Stäbe wird das Fachwerk in 2 Teilsysteme geschnitten. Es darf kein Teilsystem geben, das nur aus einem Knoten besteht.
3. Stabkräfte der geschnitten Stäbe an den jeweiligen Knoten einzeichnen
4. GGW-Bedingungen für eines der beiden Teilsysteme aufstellen und nach den (3 unbekannten) Stabkräften auflösen

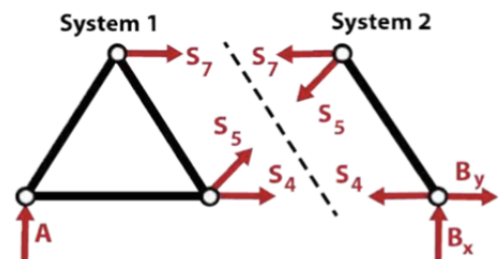


Abbildung 1: Knotengleichgewicht am Punkt A

Beachte: Zuerst das Momentengleichgewicht aufstellen, dann das Kräftegleichgewicht um die Stabkräfte direkt aus den Gleichungen zu bekommen, ohne sie gross ineinander einzusetzen.

2.2 Knotengleichgewicht

1. Lagerkräfte am Gesamtsystem bestimmen
2. Knoten auswählen und freischneiden (Bei den Lagerknoten beginnen). Stabkräfte vom Knoten aus weggerichtet einzeichnen. Externe Kräfte nicht vergessen!
3. Kräftegleichgewicht in x- und y- Richtung aufstellen
4. Verfahren an weiteren Knoten wiederholen und bekannte Kräfte einsetzen

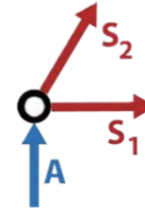


Abbildung 2: Knotengleichgewicht am Punkt A